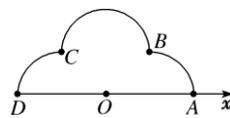


## 专题检测（二十三） 坐标系与参数方程

### 大题专攻强化练

1. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，以坐标原点为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，半圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho=4\cos \theta$ ， $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . (1) 求半圆  $C$  的参数方程；  
 (2) 若半圆  $C$  与圆  $D: (x-5)^2+(y-\sqrt{3})^2=m$  ( $m$  是常数， $m>0$ ) 相切，试求切点的直角坐标.

2. (2019·全国卷III) 如图，在极坐标系  $Ox$  中， $A(2, 0)$ ， $B\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ， $C\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ， $D(2, \pi)$ ，弧  $\widehat{AB}$ ， $\widehat{BC}$ ， $\widehat{CD}$  所在圆的圆心分别是  $(1, 0)$ ， $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $(1, \pi)$ ，曲线  $M_1$  是弧  $\widehat{AB}$ ，曲线  $M_2$  是弧  $\widehat{BC}$ ，曲线  $M_3$  是弧  $\widehat{CD}$ .



- (1) 分别写出  $M_1$ ， $M_2$ ， $M_3$  的极坐标方程；  
 (2) 曲线  $M$  由  $M_1$ ， $M_2$ ， $M_3$  构成，若点  $P$  在  $M$  上，且  $|OP|=\sqrt{3}$ ，求  $P$  的极坐标.

3.(2019·福州市第一学期抽测)在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数, } \alpha \text{ 为 } l \text{ 的倾斜角), \text{ 以原点 } O \text{ 为极点, } x \text{ 轴正半轴为极轴建}$$

立极坐标系, 曲线  $E$  的极坐标方程为  $\rho = 4 \sin \theta$ , 直线  $\theta = \beta$ ,  $\theta = \beta + \frac{\pi}{3}$ ,  $\theta = \beta - \frac{\pi}{3}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ )

与曲线  $E$  分别交于不同于极点  $O$  的三点  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

(1) 若  $\frac{\pi}{3} < \beta < \frac{2\pi}{3}$ , 求证:  $|OB| + |OC| = |OA|$ ;

(2) 当  $\beta = \frac{5\pi}{6}$  时, 直线  $l$  过  $B$ ,  $C$  两点, 求  $y_0$  与  $\alpha$  的值.

4. (2019·江西八所重点中学联考)在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的

正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $M$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \cos \theta$ , 若极坐标系内异于  $O$

的三点  $A(\rho_1, \phi)$ ,  $B(\rho_2, \phi + \frac{\pi}{6})$ ,  $C(\rho_3, \phi - \frac{\pi}{6})$  ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$ ) 都在曲线  $M$  上.

(1) 求证:  $\sqrt{3} \rho_1 = \rho_2 + \rho_3$ ;

(2) 若过  $B$ ,  $C$  两点的直线的参数方程为 
$$\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 求四边形  $OBAC$  的面

积.

5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 倾斜角为  $\alpha$  的直线  $l$  过点  $M(-2, -4)$ . 以原点  $O$  为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 且在两坐标系中长度单位相同, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \sin^2 \theta = 2 \cos \theta$ .

(1) 写出直线  $l$  的参数方程和曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 若直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 且  $|MA| \cdot |MB| = 40$ , 求倾斜角  $\alpha$  的值.

6. (2019·湖南省五市十校联考) 在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=t, \\ y=t+2 \end{cases}$  ( $t$  是参数),

以原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ . (1) 求圆  $C$  的直角坐标方程;

(2) 过直线  $l$  上的点向圆  $C$  引切线, 求切线长的最小值.

7. (2019·石家庄市模拟(一))在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = r \cos \alpha + 2, \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

( $\alpha$  为参数), 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 射线  $l$  的极坐标

方程为  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . (1) 求曲线  $C$  的极坐标方程;

(2) 当  $0 < r < 2$  时, 若曲线  $C$  与射线  $l$  交于  $A, B$  两点, 求  $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|}$  的取值范围.

8. (2019·洛阳市统考)在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t \end{cases} \quad (t \text{ 是参数}),$$

以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho^2 =$

$\frac{4}{1 + 3\sin^2 \theta}$ . (1) 求曲线  $C_1$  的普通方程和曲线  $C_2$  的直角坐标方程;

(2) 设曲线  $C_2$  经过伸缩变换  $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = y \end{cases}$  得到曲线  $C_3$ ,  $M(x, y)$  是曲线  $C_3$  上任意一点, 求点

$M$  到曲线  $C_1$  的距离的最大值.