

专题检测（二十二） 函数、导数与方程

大题专攻强化练

1. (2019·全国卷 I) 已知函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;

(2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

2. (2019·全国卷 II) 已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

3. (2019·东北四市联合体模拟(一))已知函数 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x (a > 0)$.

(1)若函数 $y = f(x)$ 图象上各点切线斜率的最大值为 2, 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x) < 2$ 有解, 求 a 的取值范围.

4. (2019·兰州市诊断考试)已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a^2 + a + 2)x + a^2(a + 2)\ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1)当 $a = -1$ 时, 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2)试判断当 $a \in [-1, 1]$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的零点的个数, 并说明理由.